RR-0844

Third Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Statistics : Paper - V (302)

(Statistical Inference)

Time : 3 Hours] [Total Marks : **70**

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :

☛ **T.Y. B.Sc.**

Name of the Subject :

☛ **STATISTICS - 5 (302)**

☛ Subject Code No. : **0 8 4 4** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **NIL**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(૩) દરેક પ્રશ્નની જમણી બાજુએ તેમના ગુણ દર્શાવ્યા છે.

(૪) સાંખ્યિકીય અને લઘુગણકીય કોષ્ટકો વિનંતી કરવાથી આપવામાં આવશે.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **૧૨**

(અ) યદચ્છ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય,

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}; \qquad 0 < x < \theta,\ \theta > 0$$
$$= 0 \qquad \text{અન્યત્ર}$$

જો $T = CX$ એ θ નો અનભિનત આગણનકાર હોય તો અચળાંક C ની કિંમત શોધો.

(બ) ધારો કે $(1, 2, 3, 4)$ એ પૉયસન વિતરણ $P(\theta)$ માંથી લીધેલો યદચ્છ નિદર્શ હોય તો પ્રઘાતોની રીતે પ્રચલ θ નો આગણક મેળવો.

(ક) નીચેના વિતરણમાં પ્રચલ θ નો પર્યાપ્ત અવલોકન વિધેય મેળવો.

$$f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-1}\ ; \qquad 0 < x < 1\ ;\ \theta > 0$$
$$= 0 \qquad ; \quad \text{અન્યત્ર}$$

(ડ) યદચ્છ ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય,

$$f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-1} \;;\quad 0 < x < 1.\ \theta > 0$$
$$= 0 \;;\quad \text{અન્યત્ર}$$

$H_0 : \theta = 1$ નું $H_1 : \theta = 2$ વિરુદ્ધ પરીક્ષણ કરવા માટે અસ્વીકૃતિ ક્ષેત્ર $C = \{x : x \geq 0.4\}$ વાપરીને પ્રથમ પ્રકારના દોષની સંભાવના શોધો.

૨ (અ) નીચેનાં પદોની સંભાવના સમજાવો : ૮

(૧) નિર્ણય વિધેય

(૨) નુકસાન વિધેય

(૩) જોખમ વિધેય

(૪) અસ્વીકાર્ય નિર્ણય વિધેય.

(બ) બિંદુ આગણનનો પ્રશ્ન નિર્ણય પ્રશ્નનો વિશિષ્ટ પ્રકાર છે તેમ દર્શાવો. ૪

(ક) પ્રચલ p નું આગણન કરવા માટે સંભાવના વિધેય, ૩

$$f(x) = {}^nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} \;;\quad x = 0, 1, \ldots\ldots, n$$
$$= 0 \;;\quad \text{અન્યત્ર}$$

માંથી એક અવલોકન x લેવામાં આવ્યું. જો નિર્ણય વિધેય $d(x) = x$ અને નુકસાન વિધેય $(d-p)^2$ હોય તો જોખમની ગણતરી કરો.

અથવા

૨ (અ) નીચેનાં પદોની વ્યાખ્યા આપો : ૬

(૧) સંગત આગણનકાર

(૨) ભિનત આગણનકાર

(૩) લઘુતમ વિચરણ અનભિનત આગણનકાર.

(બ) સાબિત કરો કે વિચરણ $S^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ એ સમષ્ટિ વિચરણ σ^2 નો ભિનત આગણનકાર છે. σ^2 નો અનભિનત આગણનકાર મેળવો. ૫

(ક) જ્યારે $n \to \infty$ ત્યારે જો $E\left(T_n\right) \to \theta$ અને $V\left(T_n\right) \to 0$ હોય તો T_n એ θનો સંગત આગણનકાર છે એમ દર્શાવો. ૪

૩ (અ) પ્રચલોના આગણન માટેની મહત્તમ વિસંભાવનાની રીત સમજાવો. ૬

(બ) મહત્તમ વિસંભાવના M અને પ્રઘાતોની રીતો વાપરીને નીચેના વિતરણોમાંના પ્રચલ θનું આગણન કરો : ૮

(૧) $f(x,\theta) = \theta\, x^{\theta-1}$; $0 < x < 1,\ \theta > 0$
$= 0$; અન્યત્ર

(૨) $f(x,\theta) = \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$; $x \ge 0,\ \theta > 0$
$= 0$; અન્યત્ર

અથવા

૩ (અ) ક્રેમર-રાવ અસમતા લખો અને તે સાબિત કરો. તે પરથી પ્રચલિત સંકેતોમાં નીચેની અસમતા મેળવો : ૯

$$E[T-\theta]^2 \ge \frac{\left[1+b'(\theta)\right]^2}{I(\theta)} + \left[b(\theta)\right]^2$$

(બ) ધારો કે $\left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\right)$ એ નીચેના બર્નોલી વિતરણમાંથી મેળવેલ યદૃચ્છ નિદર્શ છે : ૫

$P(x=1) = \theta = 1 - P(x=0)$

પ્રચલ θ માટે લઘુતમ વિચરણ સીમાબદ્ધ આગણનકાર મેળવો.

૪ (અ) પરિકલ્પનાઓના પરીક્ષણના સંદર્ભમાં નીચેનાં પદો સમજાવો : ૮

(૧) સાદી અને સંયુક્ત પરિકલ્પના

(૨) સામર્થ્ય અને સામર્થ્ય વિધેય

(૩) અસ્વીકૃતિ ક્ષેત્ર અને શ્રેષ્ઠ અસ્વીકૃતિ ક્ષેત્ર

(૪) સર્વત્ર સમર્થતમ પરીક્ષણ.

(બ) $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ સમષ્ટિમાંથી $n=16$ અવલોકનોનો યદચ્છ નિદર્શ લેવામાં આવ્યો છે. પ્રચલો μ અને σ અજ્ઞાત છે. જો નિદર્શ મધ્યક $\overline{x}=52.5$ અને નિદર્શ વિચરણ $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2=2.5$ હોય તો μ અને σ^2 માટે 90% વિશ્વસનીય અંતરાલ મેળવો. ૬

અથવા

૪ (અ) પ્રમાણ્ય સમષ્ટિ $N\left(\mu, \sigma^2\right)$માંથી જ્યારે σ^2 અજ્ઞાત હોય ત્યારે મધ્યક μ માટે વિસંભાવના ગુણોત્તર પરીક્ષણ મેળવો. ૮

(બ) $\left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{10}\right)$એ $N\left(0,\ \sigma^2\right)$માંથી મેળવેલ નિરપેક્ષ અવલોકનો છે. $H_0 : \sigma^2=1$ વિરુદ્ધ $H_1 : \sigma^2=2$નું પરીક્ષણ કરવા માટે 0.05 ક્ષેત્રમાનવાળું શ્રેષ્ઠ અસ્વીકૃતિ ક્ષેત્ર મેળવો. ૬

૫ નીચેનામાંથી ગમે તે ત્રણ પર ટૂંકનોંધ લખો : ૧૫

(૧) નેમન - પિયર્સન પ્રમેયિકા

(૨) પર્યાપ્તિ પરનું અવયવ પ્રમેય

(૩) મધ્યસ્થ પરીક્ષણ

(૪) નિરપેક્ષ અનભિનત આગણનકારોનું શ્રેષ્ઠ રેખીય સંયોજન

(૫) પ્રઘાતોની રીત.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the Instruction no. 1 of page no. 1.
(2) All questions are to be attempted.
(3) Marks are indicated on the right side of each question.
(4) Statistical and logarithmic tables will be supplied on request.

1 Answer the following questions : **12**

(a) The p.d.f. of an r.v.x is,

$$f(x) = 1 \; ; \qquad \theta \le x \le \theta + 1$$
$$= 0 \; ; \qquad e.w.$$

If $T = CX$ is an unbiased estimator of a θ then find the value of constant C.

(b) Let $(1, 2, 3, 4)$ be an r.s. from Poisson distribution $P(\theta)$. Find the estimate of parameter θ by the method of moments.

(c) Obtain the sufficient statistic for the parameter θ in the following distribution :

$$f(x, \theta) = \theta\, x^{\theta-1} \; ; \qquad 0 < x < 1; \; \theta > 0$$
$$= 0 \; ; \qquad e.w.$$

(d) The p.d.f. of an r.v. X is

$$f(x, \theta) = \theta\, x^{\theta-1} \; ; \qquad 0 < x < 1. \; \theta > 0$$
$$= 0 \; ; \qquad e.w.$$

Find the probability of type one for testing $\theta = 1$ against $\theta = 2$ using critical region $C = \{x : x \ge 0.4\}$.

2 (a) Explain the following terms : **8**

(1) Decision function

(2) Loss function

(3) Risk function

(4) Inadmissible decision function

(b) Show that the problem of point estimation is a special case of decision theory. **4**

(c) To estimate p a single observation x is obtained from the probability function. **3**

$$f(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x} (1-p)^{n-x} \quad ; \; x = 0, 1, \ldots\ldots, n$$
$$= 0 \quad ; \; e.w.$$

Calculate the risk if the decision function is $d(x) = x$ and the loss function is $(d-p)^2$.

OR

2 (a) Define the following terms : **6**

(1) Consistent estimator

(2) Biased estimator

(3) Minimum variance unbiased estimator.

(b) Show that the sample variance $S^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ is a biased estimator of the population variance σ^2. Obtain an unbiased estimator of σ^2. **5**

(c) If $E\left(T_n\right) \to \theta$ and $V\left(T_n\right) \to 0$ as $n \to \infty$ then show that T_n is a consistent estimator of θ. **4**

3 (a) Explain the method of maximum likelihood estimator. **6**

(b) Using method of m.l.e. and method of moments, estimate parameter θ in the following distribution : **8**

(1)
$$f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1} \quad ; 0 < x < 1,\ \theta > 0$$
$$= 0 \quad ; e.w.$$

(2)
$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad ; x \geq 0,\ \theta > 0$$
$$= 0 \quad ; e.w.$$

OR

3 (a) State and prove Crammer-Rao inequality. Hence in usual notations obtain the following inequality : **9**

$$E[T-\theta]^2 \geq \frac{[1+b'(\theta)]^2}{I(\theta)} + [b(\theta)]^2$$

(b) Let $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ be an r.s. from the Bernoulli distribution : **5**

$P(x=1) = \theta = 1 - P(x=0)$. Find MVB estimator for parameter θ.

4 (a) Explain the following terms with reference to the problem of testing of hypothesis : **8**

(1) Simple and composite hypothesis

(2) Power and power function

(3) Critical region and best critical region

(4) Uniformly most powerful test.

(b) An r.s. of 16 observations is drawn from $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ population. Both μ and σ are unknown. If the sample mean $\bar{x} = 52.5$ and sample variance $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{1=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 2.5$, find 90% confidence interval for μ and σ^2. **6**

OR

4 (a) Obtain likelihood ratio test for the mean μ of normal distribution $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ when σ^2 is unknown. **8**

(b) Let $\left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{10}\right)$ are independent observations from $N\left(0,\ \sigma^2\right)$. Find the best critical region of size 0.05 for testing $H_0 : \sigma^2 = 1$ ***V/s.*** $H_1 : \sigma^2 = 2$. **6**

5 Write short notes on any three of the following : **15**

(1) Neyman - Pearson Lemma

(2) Factorization theorem on sufficiency

(3) Median test

(4) Best linear combination of independent unbiased estimators.

(5) Method of moments.